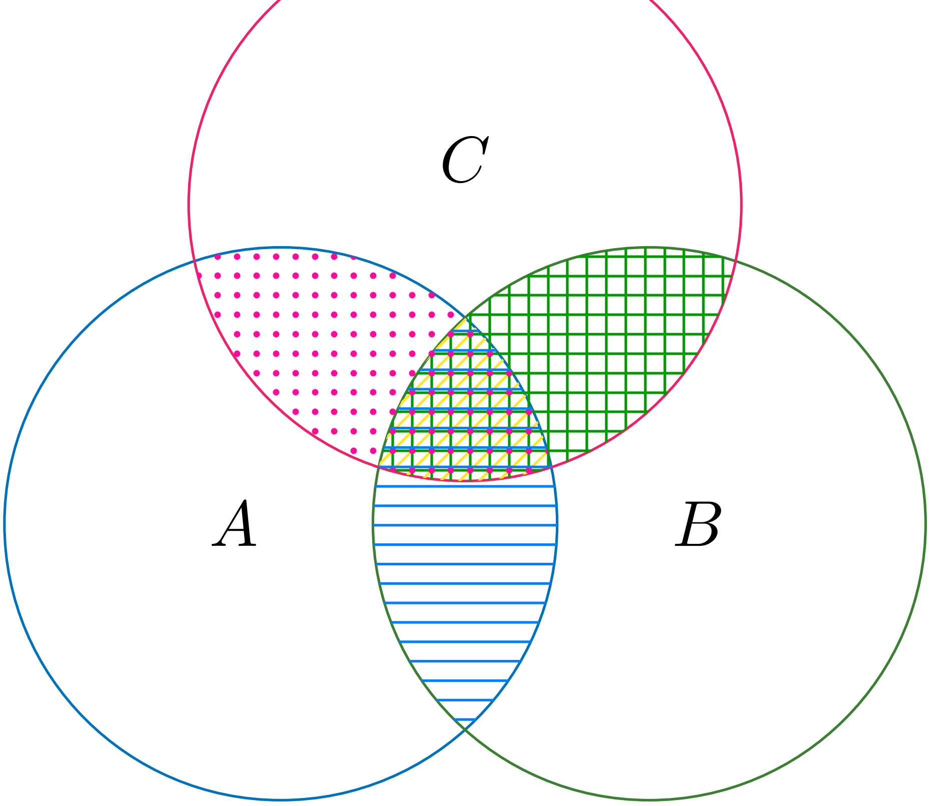
Teorie množin

Tomáš Turek[1]



27. listopadu 2024

[1]Keep in mind there may be some mistakes. You may visit GitHub.Následující text jsou moje osobní zápisky z Teorie množin z roku 2021-2022.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

1.1 Jazyk teorie množin

Jazyk teorie $x \in Y$. Také se bude používat *metajazyk* jako například: “definovat”, “formule” a “třída”.

1.1.1 Symboly

- Proměnné pro množiny $X, Y, Z, x_1, x_2, \dots$.
- Binární predikátový (relační) symbol $=$ a taky $\in$ (náležení).
- Dále také logické spojky: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftarrow$ ($\Leftarrow, \Rightarrow$).
- Také kvantifikátory: $\forall$ a $\exists$.
- Samozřejmě i závorky $(), []$.

1.1.2 Formule

Atomické formule $x = y$ a $x \in y$.

1. Jsou-li φ, ψ formule, pak $\neg\varphi, \varphi \vee \psi, \varphi \wedge \psi, \varphi \rightarrow \psi, \varphi \leftrightarrow \psi$ jsou také formule (popřípadě i uzávorkované).
2. Je-li φ formule, pak $(\forall x)\varphi$ a $(\exists x)\varphi$ jsou také formule.

Každá formule pak lze dostat z atomických formulí konečně mnoha pravidly 1 a 2.

1.1.3 Rozšíření jazyka (zkratky)

- $x \neq y$ je pro $\neg(x = y)$.
- $x \notin y$ je pro $\neg(x \in y)$.
- $x \subseteq y$ je pro ”x je podmnožina y”$(\forall u)(u \in x \rightarrow u \in y)$.
- $x \subset y$ je pro ”x je vlastní podmnožina”$(x \subseteq y \wedge x \neq y)$.

Cvičeni: Napište formulí “množina x je prázdná”.

1.2 Axiomy logiky (“jak se chovají logické symboly”)

Axiomy výrokové logiky např.: schéma axiomů: Jsou-li φ, ψ formule, pak

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

je **axiom**.

Axiomy predikátové logiky např.: Schéma axiomů: Jsou-li φ, ψ formule, x proměnná, která není volná ve φ, pak

$$(\forall x)(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\forall x)\psi)$$

je axiom.

Axiomy pro rovnost:

- x je proměnná, pak $x = x$ je axiom.
- x, y, z jsou proměnné, R je relační symbol, pak

$$(x = y) \rightarrow (\forall z)(R(x, z) \leftrightarrow R(y, z))$$

$$(x = y) \rightarrow (\forall z)(x \in z \leftrightarrow y \in z)$$

$$(x = y) \rightarrow (\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y)$$

Odvozovací pravidla:

- Z $\varphi, \varphi \rightarrow \psi$ odvoď ψ.
- Z φ' odvoď $(\forall x)\varphi$.

Kapitola 2

Axiomy teorie množin

“Jak se chová $\in$.” “Jaké množiny existují.”

Zermelo-Fraenkelova teorie, zkráceně **ZF** má celkem 9 axiomů (resp. 7 axiomů a 2 schémata). Pak je ještě 10.axiom výběru (**AC**) to pak je **ZF+AC=ZFC**.

2.1 1.Axiom existence množin

“Existuje množina.”

$$(\forall x)(x = x)$$

2.2 2.Axiom extenzionality

Udává souvislost mezi $\in$ a $=$. “Množina je určena svými prvky.”

$$(\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y$$

Cvičeni: Dokažte $((x \subseteq y) \wedge (y \subseteq z)) \rightarrow x \subset z$.

2.3 3.Schéma axiomu vydělení

Je-li $\varphi(x)$ formule, která neobsahuje volnou proměnnou z. Pak:

$$(\forall a)(\forall x)(\exists z)(x \in z \leftrightarrow (x \in a \wedge \varphi(x))$$

je axiom.

“Z množiny a vybereme prvky s vlastností $\varphi(x)$ a ty vytvoří novou množinu z.” Díky axiomu extenzionality je taková z právě jedna.

2.3.1 Značení:

- $\{x; x \in a \wedge \varphi(x)\}$ je zkrácení.
- $\{x \in a; \varphi(x)\}$ ”Množina všech prvků a splňující $\varphi(x)$.”

Definice 1.
- *Průnik:* $a \cap b$ *je* $\{x, x \in a \wedge x \in b\}$.
- *Rozdíl:* $a \setminus b$ *je* $\{x, x \in a \wedge x \notin b\}$

Cvičení:

- *Napište formulí “množina a je jednoprvková”.*
- *Dokažte, že množina všech množin neexistuje.*

2.4 4.Axiom dvojice

$$(\forall a)(\forall b)(\exists z)(\forall x)(x \in z \leftrightarrow (x = a \vee x = b))$$

"(Ne)každým dvěma množinám a, b existuje množina z, která má za prvky právě a, b."

Definice 2. • *$\{a, b\}$ je **neuspořádaná dvojice** množin a, b, jakožto dvouprvková množina s prvky a, b (pokud $a \neq b$).*

- *$\{a\}$ znamená $\{a, a\}$, nebo-li jednoprvková množina s prvkem a.*

Příklad. Můžeme vytvořit $\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$.

Cvičení: Dokažte $(\forall z)(x \in z \leftrightarrow y \in z) \rightarrow x = y$.

Definice 3. *(a, b) je **uspořádaná dvojice** množin a, b. To je pak množina $\{\{a\}, \{a, b\}\}$*

Poznámka. Pro $a = b$ je $(a, b) = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$.

Lemma 1.
$$(x, y) = (u, v) \leftrightarrow (x = u \wedge y = v)$$

Důkaz. • $\leftarrow$

- $\{x\} = \{u\}$ plyne z axiomu extenzionality.
- $\{x, y\} = \{u, v\}; \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$
- $\rightarrow$
- $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$ to pak znamená, že $\{x\} = \{u\} \vee \{x\} = \{u, v\}$ kde v obou případech $x = u$.
- $\{u, v\} = \{x\} \vee \{u, v\} = \{x, y\}$ tedy $v = x \vee v = y$
- Pokud $v = x$ pak z $x = u$ plyne, že $v = u = x$.

□

Definice 4. *Jsou-li $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ množiny, definujeme **uspořádanou n-tici** $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$. Následně (a_1) znamená a_1 a je-li definována $(a_1, \ldots, a_k)$ pak $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1})$ je $((a_1, \ldots, a_k), a_{k+1})$.*

Lemma 2.
$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n) \leftrightarrow (a_1 = b_1 \wedge \ldots a_n = b_n)$$

Důkaz. Jako cvičení. □

2.5 5.Axiom sumy (axiom of the union)

$$(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \leftrightarrow (\exists y)(x \in y \wedge y \in a))$$

Definice 5. *$\bigcup a$ je **suma** množiny a. Tzn "$\{x, (\exists y)(x \in y \wedge y \in a)\}$".*

Pozorování: Pokud $a = \{b, c\}$, pak $\bigcup\{b, c\} = \{x, x \in b \vee x \in c\}$.

Definice 6. *$b \cup c$ je $\bigcup\{b, c\}$ sjednocení množin b, c.*

Definice 7. *Jsou-li $a_1, \ldots a_n$ množiny, definujeme **neuspořádanou n-tici** $\{a_1, \ldots a_n\}$ (n-prvkovou množinu, pokud každé a_i je různé) rekurzivně. Je-li definovaná $\{a_1, \ldots a_k\}$ pro $k \geq 2$, pak $\{a_1, \ldots a_k, a_{k+1}\}$ je $\{a_1, \ldots a_k\} \cup \{a_{k+1}\}$.*

2.6 6.Axiom potence (power set, potenční množina)

$$(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \leftrightarrow x \subseteq a)$$

"Existuje množina z jejichž prvky jsou právě podmnožiny množiny a."

Definice 8. *$\mathcal{P}(a)$ je "$\{x; x \subseteq a\}$" potenční množina $[2^a]$ množiny a (potence a).*

Příklad. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ a $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Cvičení: Co je $\mathcal{P}(\bigcup a)$ a jestli $\bigcup(\mathcal{P}(a)) = a$?

2.7 7.Schéma axiomu nahrazení

"Obraz množiny funkcí je množina."

Je-li $\psi(u,v)$ formule, která neobsahuje volné proměnné w,z, pak

$$(\forall u)(\forall v)(\forall w)((\psi(u,v)\wedge\psi(u,w))\rightarrow v=w)\rightarrow(\forall a)(\forall z)(\forall v)(v\in z\leftrightarrow(\exists u)(u\in a\wedge\psi(u,v)))$$

je axiom.

- "Je-li ψ funkce (částečná) určená formulí: $\psi(u,v)$ je $f(u)=v$, pak obrazem a touto funkcí je opět množina (z)."
- Také implikuje schéma vydělení: $\varphi(u)\wedge u=v$.
- Poznámka: *transfinitní rekurze, konstrukce $\omega+\omega$, Zornovo lemma, věta o dobrém uspořádání.*

2.8 8.Axiom fundovanosti (foundation, regularity)

$$(\forall a)(a\neq\emptyset\rightarrow(\exists x)(x\in a\wedge x\cap a=\emptyset))$$

"Každá množina má prvek, který je s ní disjunktní."

Cvičení: Ukažte, že Axiom fundovanosti zakazuje existenci konečných cyklů relace $\in$. Tedy množiny y takové, že $y\in y$, ale i $y_1,y_2,\ldots,y_n$ takové, že $y_1\in y_2\in\cdots\in y_n\in y_1$.

Díky axiomu fundovanosti lze všechny množiny vygenerovat z prázdné množiny operacemi $\mathcal{P},\bigcup$.

Kapitola 3

Třídy

Definice 9. *$\varphi(x)$ je formule a $\{x; \varphi(x)\}$ označuje "seskupení" množin, pro které platí $\varphi(x)$.*

- Pokud $\varphi(x)$ je tvaru $x \in a \wedge \psi(x)$, pak je to množina (axiom vydělení).
- $\{x; \varphi(x)\}$ je třídový term, soubor které označuje je **třída** určená formulí $\varphi(x)$.
- "Definovatelný soubor množin."
- Je-li y množina, pak $y = \{x; x \in y \wedge x = x\}$ je třída.
- Tedy každá množina je i třída.
- **Vlastní třída** je třída, která není množinou.

3.1 Rozšíření jazyka:

- Ve formulích na místě volných proměnných připustíme třídové termy.
- Navíc proměnné pro třídy jsou $X, Y, \dots$ (nebude možné je kvantifikovat).

3.2 Atomické proměnné

- $x = y, x \in y, x = X, x \in X, X \in x, X = Y, X \in Y$
- Plus ještě výrazy vzniklé nahrazením $\{x, \varphi(x)\}$ za x a $\{y, \varphi(y)\}$ za y.
- Ostatní formule rozšířeného jazyka vznikají pomocí logických spojek $(\neg, \vee, \wedge, \leftarrow, \rightarrow, \leftrightarrow)$ a kvantifikací množinových proměnných $((\forall x) \dots (\exists y) \dots)$.
- Formule s třídovými termy bez třídových proměnných označován jako "zkrácený zápis" formule základního jazyka.
- Formule s třídovými proměnnými označované jako "schéma formulí" základního (popř. rozšířeného) jazyka.

3.3 Eliminace třídových termů

x, y, z, X, Y jsou proměnné a $\varphi(x), \psi(x)$ formule základního jazyka. X zastupuje $\{x, \varphi(x)\}$ a Y zastupuje $\{y, \varphi(y)\}$.

1. $z \in X$ zastupuje $z \in \{x, \varphi(x)\}$.
   - "z je prvkem třídy všech množin, splňující $\varphi(x)$."
   - Nahradíme: $\varphi(z)$.
2. $z = X$ zastupuje $z = \{x, \varphi(x)\}$.
   - "Množina z se rovná třídě X."
   - Nahradíme: $(\forall u)(u \in z \leftrightarrow \varphi(u))$.

3. $X \in Y$ zastupuje $\{x, \varphi(x)\} \in \{y, \psi(y)\}$.
    - Nahradíme: $(\exists u)(\forall v)((v \in u \leftrightarrow \varphi(v)) \wedge \psi(u))$.
4. $X \in y$ zastupuje $\{x, \varphi(x)\} \in y$.
    - Nahradíme: $(\exists u)(\forall v)((v \in u \leftrightarrow \varphi(v)) \wedge u \in y)$.
5. $X = Y$ zastupuje $\{x, \varphi(x)\} = \{y, \psi(y)\}$.
    - Nahradíme: $(\forall u)(\varphi(u) \leftrightarrow \psi(v))$

Meta pozorování: Formule rozšířeného jazyka určují stejné třídy jako formule základního jazyka. Příklad $\{x; x \notin \{z, \psi(z)\}\} \to \{x; \neg\psi(x)\}$.

3.4 Třídové operace

Definice 10.
- *$A \cap B$ je $\{x, x \in A \wedge x \in B\}$.*
- *$A \cup B$ je $\{x, x \in A \vee x \in B\}$.*
- *$A \setminus B$ je $\{x, x \in A \wedge x \notin B\}$.*
- *Pokud $A = \{x, \varphi(x)\}$ a $B = \{y, \psi(y)\}$, pak $A \cap B = \{z, \varphi(z) \wedge \psi(z)\}$.*

Definice 11. *$\{x; x = x\}$ je **univerzální třída**, která se značí jako V.*

- A je třída, (absolutní) doplněk A je $V \setminus A$, který se značí jako $-A$.
- $A \subseteq B, A \subset B$ značí, že A je podtřídou B (popř. vlastní podtřídou).

Cvičení: Rozepište v základním jazyce teorie množin.

1. *$\bigcup A$ nebo-li suma třídy A je $\{x, (\exists a)(a \in A \wedge x = a)\}$*
2. *$\bigcap A$ nebo-li průnik třídy A je $\{x, (\forall a)(a \in A \to x = a)\}$*
3. *$\mathcal{P}(A)$ nebo-li potenciál třídy A je $\{a, a \subseteq A\}$.*

$\bigcap \emptyset = V$, protože $\{x, (\forall a)(a \in \emptyset \to x \in a)\}$.
Cvičení: $a \neq \emptyset$, je $\bigcap a$ množina?
Cvičení: Je $\mathcal{P}(V) = V^2$?

Lemma 3. *Univerzální třída V není množina.*

Důkaz. *Cvičení.* □

Lemma 4. *Je-li A třída a množina, průnik $A \cap a$ je množina.*

Důkaz. Schéma axiomu vydělení $A = \{x, \varphi(x)\}, a \cap A = \{x, x \in a \wedge \varphi(x)\}$. □

Definice 12. ***Kartézský součin tříd** A, B značen $A \times B$ je $\{(a, b), a \in A \wedge b \in B\}$ což je zkrácený zápis pro $\{x, (\exists a)(\exists b)(x = (a, b) \wedge a \in A \wedge b \in B)\}$.*

Lemma 5. *Jsou-li a, b množiny pak i $a \times b$ je množina.*

Důkaz.
- Platí $a \times b \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b))$.
- Vpravo je množina axiomu dvojice , sumy, dvakrát potence.
- Pak podle lemma (axiomu vydělení) $A = a \times b, a = \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b))$ tedy $a \times b$ je množina.
- Pokud $u \in a, v \in b$, pak $\{u\}, \{u, v\} \subseteq a \cup b$ tedy $\{u\}, \{u, v\} \in \mathcal{P}(a \cup b)$, stejně pak $\{\{u\}, \{u, v\}\} \subseteq \mathcal{P}(a \cup b)$ a $\{\{u\}, \{u, v\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b))$.

□

Definice 13. *X je třída, pak $X^1 = X$, induktivně pak $X^n = X^{n-1} \times X$.*

X^n je třída všech uspořádaných n-tic prvků X.
Pozorování: $V^n \subseteq V^{n-1} \subseteq \cdots \subseteq V^1 = V$
Cvičení: Ukažte, že obecně neplatí $X \times X^2 = X^3$. Například pro $X = \{\emptyset\}$.

Kapitola 4

Relace

Definice 14.
- *Třída R je (binární) **relace**, pokud $R \subseteq V \times V$.*
- *xRy zkratka za $(x,y) \in R$.*
- *n-ární relace je $R \subseteq V^n$.*

Příklad.
- *Relace náležení E je $\{(x,y), x \in y\}$.*
- *Relace identity Id je $\{(x,y), x = y\}$.*

Definice 15. *Je-li X relace (libovolná třída), pak:*

- *$Dom(X)$ je $\{u, (\exists v)(u,v) \in X\}$*
- *$Rng(X)$ je $\{v, (\exists u)(u,v) \in X\}$*
- *Je-li Y třída, pak $X \shortparallel Y (X[Y])$ je $\{z, (\exists y)(y \in Y \wedge (y,z) \in X\}$.*
- *Nebo-li obraz třídy Y třídou X.*
- *$X \restriction Y$ je $\{(y,z), y \in Y \wedge (y,z) \in X\}$.*
- *Zúžení třídy X na třídu Y. (restrikce, parcelizace)*

Lemma 6. *Je-li x množina, Y třída, pak $Dom(x), Rng(x), x \restriction Y, x \shortparallel Y$ jsou množiny.*

Důkaz.
- Vnoříme do větší množiny.
- Platí $Dom(x) \subseteq \bigcup(\bigcup(x))$.
- Když $u \in Dom(x)$ pak $(\exists v)(u,v) \in x$ a $u \in \{u\} \in (u,v) \in x$. Tedy $\{u\} \in \bigcup(x)$, tedy $u \in \bigcup(\bigcup(x))$.
- Podobně i pro $Rng(x) \subseteq \bigcup(\bigcup(x))$.
- $v \in Rng(x) : (\exists u)(u,v) \in x$
- $v \in \{u,v\} \in (u,v) \in x$ tedy $v \in \bigcup(\bigcup(x))$.
- Pak už jenom $x \restriction Y \subseteq x; x \shortparallel Y \subseteq Rng(x)$

□

Definice 16.
- *R, S jsou relace. Pak R^{-1} je $\{(u,v), (v,u) \in R\}$.*
- *Nebo-li relace **inverzní** k R.*
- *$R \circ S$ je $\{(u,v); (\exists w)((u,w) \in R \wedge (w,v) \in S)\}$.*
- *Nebo-li složení relací R a S.*

Poznámka. $(f \circ g)(x) = g(f(x))$

Cvičení

- *Ověřte, že pro libovolnou relaci R je $Id \circ R = R = R \circ Id$.*
- $(x,y) \in E \circ E \leftrightarrow x \in \bigcup y$

Definice 17. *Relace F je **zobrazení (funkce)** pokud:*

$$(\forall u)(\forall v)(\forall w)(((u, v) \in F \wedge (u, w) \in F) \rightarrow v = w)$$

"Pro každé $v \in Dom(F)$ existuje právě jedna množina v taková, že $(u, v) \in F$." Píšeme $F(u) = v$.

Definice 18.

- *F je zobrazení třídy X **do** třídy Y; $F : X \rightarrow Y$, pokud $Dom(F) = X$ a $Rng(F) \subseteq Y$.*
- *F je zobrazení třídy X **na** třídu Y; pokud navíc platí $Rng(F) = Y$.*
- *F je **prosté** zobrazení pokud F^{-1} je zobrazení.*
- *Pokud $(\forall v)(\forall u)(\forall w)((F(u) = w \wedge F(v) = w) \rightarrow u = v)$.*
- *"Každý prvek $Rng(F)$ má právě jeden vzor."*

Pozorování: Pokud F je prosté zobrazení, pak F^{-1} je také prosté zobrazení.

Definice 19. *A je třída, φ je formule pak:*

- *$(\exists x \in A)\varphi$ je zkratka za $(\exists x)(x \in A \wedge \varphi)$.*
- *$(\forall x \in A)\varphi$ je zkratka za $(\forall x)(x \in A \rightarrow \varphi)$.*

4.1 Značení:

Obraz / vzor třídy X zobrazením F.

- $F[X]$ místo $F \shortparallel X$: $F[X] = \{y, (\exists x \in X) y = F(x)\}$
- $F^{-1}[X]$ místo $F^{-1} \shortparallel X$: $F^{-1}[X] = \{y, (\exists x \in X) x = F(y)\}$

Definice 20. *A je třída, a je množina, pak ${}^{a}A$ je $\{f; f : a \rightarrow A\}$, třída všech zobrazení z a do A.*

Poznámka.

- Z axiomu nahrazení $Rng(f)$ je množina, $f \subseteq a \times Rng(f)$, tedy f je množina.
- Nelze definovat ${}^{B}A$ pokud B je vlastní třída a $A \neq \emptyset$, protože je-li $Dom(f)$ vlastní třída, pak je i f.
- ${}^{\emptyset}A = \{\emptyset\}$
- ${}^{x}\emptyset = \emptyset$

Lemma 7.

1. *Pro libovolné množiny x, y je ${}^{x}y$ množina.*
2. *Je-li $x \neq \emptyset, Y$ je vlastní třída, pak ${}^{x}Y$ je vlastní třída.*

Důkaz.

1. Pokud $f : x \rightarrow y$. pak $f \subseteq x \times y$, tedy $f \in \mathcal{P}(x \times y)$. Tedy ${}^{x}y \subseteq \mathcal{P}(x \times y)$.
2. Pro $y \in Y$ definujeme konstantní zobrazení $K_y : x \rightarrow Y$ tak, že $(\forall u \in x)(K_y(u) = y)$. $K_y = x \times y$, protože $x \neq \emptyset$, pro $y \neq y'$ platí $K_y \neq K_{y'}$. $K = \{K_y, y \in Y\}$ máme $K \subseteq^{x} Y$.
    - Teď sporem: Pokud ${}^{x}Y$ je množina, pak K je množina. Definujeme $F : K \rightarrow Y$ jako $F(K_y) = y$. Z axiomu nahrazení Y je množina a to je spor.

□

4.2 Uspořádání

Definice 21. *Relace $R(\subseteq V \times V)$ je na třídě A:*
Reflexivní:

$$(\forall x \in A)((x, x) \in R)$$

Antireflexivní:

$$(\forall x \in A)((x, x) \notin R)$$

Symetrická:

$$(\forall x, y \in A)((x, y) \in R \leftrightarrow (y, x) \in R)$$

Slabě antisymetrická:

$$(\forall x, y \in A)(((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R) \rightarrow y = x)$$

Antisymetrická

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(xRy \rightarrow \neg(yRx))$$

Trichotomická:

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(xRy \vee yRx \vee x = y)$$

Tranzitivní:

$$(\forall x, y, z \in A)((xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz)$$

Pozorování: Tyto vlastnosti jsou **dědičné**, to znamená, že platí na každé podtřídě $B \subseteq A$.

Definice 22.

- *Relace R je **uspořádání na třídě** A, pokud R je reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní.*
- *$x, y \in A$ jsou **porovnatelné (srovnatelné)** relací R pokud $xRy \vee yRx$.*

4.2.1 Značení:

$x \leq_R y$ znamená xRy, neboli "x je menší nebo rovno y vzhledem k R."

Definice 23.

- *Uspořádání R je **lineární** pokud R je trichotomické.*
- *R' je **ostré** uspořádání pokud je tvaru $R \setminus Id$ (je antireflexivní, antisymetricá a tranzitivní).*
- *$x <_R y$ značí $xR'y$*

Cvičení: Doplňte tabulku ANO/NE.

Relace	Uspořádání?	Ostré?
E		
Id		

Definice 24. *Nechť R je uspořádání na třídě A a nechť $X \subseteq A$. Řekněme, že $a \in A$ je (vzhledem k R a A):*

- ***Majorita (horní mez)** třídy X, pokud $(\forall x \in X)(x \leq_R a)$.*
- *Minoranta (dolní mez) třídy X, pokud $(\forall x \in X)(a \leq_R x)$.*
- ***Maximální prvek** třídy X, pokud $a \in X \wedge (\forall x \in X)(\neg(a <_R x))$.*
- *Minimální prvek třídy X, pokud $a \in X \wedge (\forall x \in X)(\neg(x <_R a))$.*
- ***Největší prvek** třídy X, pokud $a \in X$ a a je majoranta X.*
- *Největší prvek třídy X, pokud $a \in X$ a a je minoranta X.*
- ***Supremum** třídy X, pokud a je nejmenší prvek třídy všech majorant X.*
- *Infimum třídy X, pokud a je největší prvek třídy všech minorant X.*

Pozorování: Největší implikuje maximální, pokud R je lineární, tak platí i opačná implikace. Také největší a supremum je vždy nejvýše 1. Lze značit jako $a = \max_R(X)$ a $a = \sup_R(X)$.

Definice 25.

- *X je **shora omezená**, pokud existuje majoranta X v A.*
- *X je zdola omezená, pokud existuje minoranta X v A.*
- *X je **dolní množina**, pokud $(\forall x \in X)(\forall y \in A)(y \leq_R x \rightarrow y \in X)$.*
- *Analogicky i horní množina.*

- $x \in A$, *pak* $| \leftarrow, x]$ *je* $\{y, y \in A \wedge y \leq_R x\}$. *Nebo-li horní ideál omezená* x.

Pozorování: R uspořádání na A, pak pro libovolné $x, y \in A$ platí $x \leq_R y \leftrightarrow | \leftarrow, x] \subseteq | \leftarrow, y]$.

Poznámka.

- Konstrukce $\mathbb{R}$ z $\mathbb{Q}$: **Dedekindovy řezy**.
- $X \subseteq \mathbb{Q}, X$ je dolní množina (vzhledem k $\subseteq$) a navíc existuje-li $\sup X$, pak $\sup X \subseteq X$.

Definice 26. *Uspořádání R na třídě A je **dobré**, pokud každá neprázdná podmnožina A : $(u \subseteq A)$ má nejmenší prvek vzhledem k R.*

Cvičení: Napsat definice pomocí logických formulí.
Pozorování: "Dobré" je dědičná vlastnost. Dobré implikuje lineární.
Cvičení: Najděte nějaké množiny, na nichž je E dobré ostré uspořádání.

Definice 27. ***Ekvivalence** je pokud je reflexivní, symetrická a tranzitivní.*

Kapitola 5

Srovnávání mohutností

Definice 28. • *Množiny x, y mají **stejnou mohutnost** (psáno $x \approx y$) pokud existuje prosté zobrazení x na y (nebo-li bijekce). Někdy označováno jako x je ekvivalentní y.*

- *Množina x má **mohutnost menší nebo rovnou** mohutnosti y (psáno $x \preceq y$) pokud existuje prosté zobrazení x do y. Někdy označováno jako x je subvalentní y.*
- *x má **menší mohutnost** než y (psáno $x \prec y$) pokud platí $x \preceq y \wedge \neg(x \approx y)$).*

Pozorování: $x \subseteq y \to x \preceq y$ (identita), $x \subset y \to x \preceq y$ (ne $x \prec y$, například $\mathbb{N} \approx \mathbb{N} \setminus \{1\}$).

Poznámka. To jestli $\preceq$ je trichotomická v **ZF** nelze rozhodnout. Přidáím axiomu výběru už ale ano.

Lemma 8. *Jsou-li x, y, z množiny, potom:*

1. $x \approx x$
2. $x \approx y \to y \approx x$
3. $((x \approx y) \wedge (y \approx z)) \to x \approx z$, *tedy $\approx$ je ekvivalence.*
4. $x \preceq x$
5. $x \preceq y \wedge y \preceq z \to x \preceq z$

Důkaz. Prakticky jen triviální, stačí najít dané zobrazení.

- Id
- $F \to F^{-1}$
- $F \wedge G \to F \circ G$
- Id
- $F \wedge G \to F \circ G$

□

Pozorování: $x \approx y \to (x \preceq y \wedge y \preceq x)$

Theorem 1 (Cantor-Bernstein)**.**

$$(x \preceq y \wedge y \preceq x) \to x \approx y$$

Důkaz. Důkaz se provede pomocí grafů. Také bude potřeba dodatečné lemma, které bude později. Jako graf si představíme bipartitní, kde jedna partita je x a druhá y. Následně přidáme orientované hrany jakožto funkce f a g, kde $f : x \to y, g : y \to x$ jsou prosté zobrazení. Teď se podíváme na komponenty grafu.

1. Buď může být kružnice sudé délky.
2. Nebo cesta s počátkem.
3. Anebo cesty obousměrné.

Nyní uvažme “indukovaná” zobrazení: $(\hat{f}) : \mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(y)$. Tahle funkce je monotónní vzhledem k inkluzi. Definujeme $H : \mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x)$ takto: Pro $u \subseteq x$ nechť $H(u) = x - g[y - f[u]]$. H je monotónní vzhledem k inkluzi. $u_1 \subseteq u_2 \Rightarrow f[u_1] \subseteq f[u_2] \Rightarrow y - f[u_1] \supseteq y - f[u_2] \Rightarrow, \Rightarrow g[y - f[u_1] \supseteq g[y - f[u_2] \Rightarrow H(u_1) \subseteq H(u_2)$. Podle lemma o pevném bodě $(\exists c)(H(c) = c)$, tedy $x - g[y - f[c]] = c \Rightarrow x - c = g[y - f[c]]$. Tedy g^{-1} je prosté zobrazení $x \setminus c$ na $y \setminus f[c]$. Stačí definovat $h : x \to y$ jako:

$$h(u) = \begin{cases} f(u) & \text{pokud } u = c \\ g^{-1}(u) & \text{jinak} \end{cases}$$

h je prosté zobrazení x na y. □

Definice 29. *Zobrazení $H : \mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x)$ je **monotónní** (vzhledem k inkluzi) pokud pro každé dvě množiny $u, v \subseteq x$ platí $u \subseteq v \to H(u) \subseteq H(v)$.*

Lemma 9. *Je-li $H : \mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x)$ zobrazení monotónní vzhledem k inkluzi, pak existuje podmnožina $c \subseteq x$ taková, že $H(c) = c$. Též označován jako **pevný bod**.*

Důkaz. $A = \{u, u \subseteq x \wedge u \subseteq H(u)\}$, $c = \bigcup A$ neboli supremum. $u \in A$ pak dostanu dvě možnosti:

1. $u \subseteq c$
2. $u \subseteq H(u) \subseteq H(c)$ (díky tomu, že H je monotónní)

Z toho pak plyne, že $H(c)$ je majoranta a tedy $c \subseteq H(c)$. Pak z monotonie platí $H(c) \subseteq H(H(c))$, tedy $H(c) \in A$, takže $H(c) \subseteq c$, nebo-li c je majoranta. Z obou inkluzí pak plyne, že $c = H(c)$. □

Cvičení: Ilustrace monotńní funkce $h : [0, 1] \to [0, 1]$.
Cvičení: $A \subseteq \mathcal{P}(x)$ a uspořádání $\subseteq$, pak $\sup_{\subseteq} A = \bigcup A$ a $\inf_{\subseteq} A = \bigcap A$.

Příklad.
- $\omega = \mathbb{N}_0$ pak $\omega \approx \omega \times \omega$
- $f : \omega \to \omega \times \omega$ jako $f(n) = (0, n)$
- $g : \omega \times \omega \to \omega$ jako $g((m, n)) = 2^m 3^n$
- Podle Věty platí $\omega \approx \omega \times \omega$. item $h : \omega \to \omega \times \omega$ jako $h((m, n)) = 2^m(2n + 1) - 1$

Cvičení: Ověřte, že g je prosté a h je bijekce.
Cvičení: $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$
Cvičení: $[0, 1] \approx [0, 1] \times [0, 1]$

Lemma 10. *Nechť x, y, z, x_1, y_1 jsou množiny, pak:*

1. $x \times y \approx y \times x$
2. $x \times (y \times z) \approx (x \times y) \times z$
3. $(x \approx x_1 \wedge y \approx y_1) \to (x \times y \approx x_1 \times y_1)$
4. $x \approx y \to \mathcal{P}(x) \approx \mathcal{P}(y)$
5. $\mathcal{P}(X) \approx^x 2$, *kde* $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Důkaz. Vždy jde o to najít vhodné funkce.

1. $(u, v) \to (v, u)$
2. $(u, (b, c)) \to ((u, b), c)$
3. $f : x \to x_1, g : y \to y_1 : (a, b) \to (f(a), g(b))$
4. $f : x \to y, u \to f[u]$ (izomorfismus vzhledem k inkluzi)
5. Pro $u \subseteq x$ definujeme charakteristickou funkci $\chi_a : x \to 2$, kde;

$$\chi_a(v) = \begin{cases} 1 & v \in a \\ 0 & v \notin a \end{cases}$$

Zobrazení $\{(a, \chi_a); a \subseteq x\}$ je prosté a zobrazuje $\mathcal{P}(x)$ na ${}^x 2$. □

5.1 Konečné množiny

Definice 30 (Tarski)**.** *Množina x je* ***konečná****, označíme $Fin(x)$, pokud každá neprázdná podmnožina $\mathcal{P}(x)$ má* ***maximální*** *prvek vzhledem k inkluzi.*

Cvičení: Napište definici pomocí formule.

Pozorování: x je konečná právě tehdy, když každá neprázdná podmnožina $\mathcal{P}(x)$ má minimální prvek vzhledem k inkluzi.

Důkaz. Uvažme $d : \mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x)$ jako $d(u) = x \setminus u$. $u \subseteq v \Leftrightarrow d(u) \supseteq d(v)$ □

Definice 31. *Množina a je* ***Dedekindovsky konečná*** *pokud má větší mohutnost než každá vlastní podmnožina $b \subset a$. (Nebo-li neexistuje prosté zobrazení a na b.)*

Lemma 11. *Je-li množina a konečná tak je i Dedekindovsky konečná.*

Důkaz. Nutno dokázat, že pokud $b \subset a$ pak $b \preceq a$. Sporem: $b \approx a$. Nechť $y = \{b, b \subset a \wedge b \approx a\}, y \neq \emptyset, y \in \mathcal{P}(a)$. Nechť $c \in y$ je minimální prvek y vzhledem k $\subseteq$. Nechť $f : a \to a$ je prosté zobrazení a na c. $d = f[c]$. $f \restriction c$ je prosté zobrazení c na d. Tedy $c \approx d$, tedy $d \in y$. $d \subseteq c : (\exists x)(x \in a \setminus c)$ pak $f(x) \in c \setminus d$. Spor s minimalitou volby c. □

Poznámka. Opačná implikace v **ZF** není dokazatelná.

- Existuje lineární uspořádání $\leq$, které je dobré, pak i $\geq$ je dobré.
- Existuje lineární uspořádání a každá 2 lineární uspořádání jsou izomorfní.
- x je konečná $\Leftrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(x))$ je dedekindovsky konečná.

Theorem 2. *1. Je-li a konečná uspořádaná množina (relací $\leq$) pak každá její neprázdná podmnožina $b \subseteq a$ má maximální prvek.*

2. Každé lineární uspořádání na konečné množině je dobré.

Důkaz. 1. Pro každé $x \in a$ uvažme $| \leftarrow, x] = \{y, y \in a \wedge y \leq x\}$.

- $u = \{| \leftarrow, x], x \in b\}, u \subseteq \mathcal{P}(a), u \neq \emptyset$
- Z konečnosti a existuje $m \in b$ takové, že $| \leftarrow, m]$ je maximální prvek vzhledem k $\subseteq$.
- $x \leq y \Leftrightarrow | \leftarrow, x] < | \leftarrow, y]$
- Tedy m je maximální prvek b vzhledem k $\subseteq$.
- Minimální prvek se najde podobně, akorát to bude horní množina a minimální prvek.

2. Minimální prvek v lineárním uspořádání je už nejmenší.

□

Definice 32. *F je zobrazení A_1 do A_2, R_1, R_2 jsou relace. F je* ***izomorfismus*** *tříd A_1, A_2 vzhledem k R_1, R_2 pokud F je prosté zobrazení A_1 na A_2 a $(\forall x \in A_1)(\forall y \in A_2)(x, y) \in R_1 \leftrightarrow (F(x), F(y)) \in R_2$.*

Definice 33. *A je mmožina uspořádaná relací R. B je mmožina uspořádaná relací S. Zobrazení F je* ***počátkové vnoření*** *A do B, pokud $A_1 = Dom(F)$ je dolní podmnožina A a $B_1 = Rng(F)$ je dolní podmnožina B. A F je izomorfismus A_1 a B_1 vzhledem k R, S.*

Lemma 12. *Nechť F, G jsou počátkové vnoření dobře uspořádané množiny A do dobře uspořádané množiny B. Potom $F \subseteq G$ nebo $G \subseteq F$.*

Důkaz. Nechť R je dobré uspořádání množiny A. Nechť S je dobré uspořádání množiny B. $Dom(F), Dom(G)$ jsou dolní podmnožiny A. R je lineární, tedy $Dom(F) \leq Dom(G) \vee Dom(G) \leq Dom(F)$. (BÚNO: $Dom(F) \leq Dom(G)$, jinak přejmenuji množiny). Dokážeme $(\forall x \in Dom(F))F(x) = G(x)$. Sporem Nechť x je nejmenší (vzhledem k R) prvek množiny $\{z, z \in A \wedge G(z) \neq F(z)\}$. Tedy $\forall y <_R x : F(y) = G(y)$. Z linearity S je $F(x) <_S G(x) \vee G(x) <_S F(x)$ (BÚNO: $F(x) <_S G(x)$). Nechť $b = F(x)$. Je-li $z \in Dom(G)$ pak buď: $z <_R x$ $G(z) = F(z)$, $z \geq_R x$ $F(x) = b$. Pak $G(z) \geq_S G(x) >_S F(x) = b$. V obou případech $b \notin Rng(G)$ a tedy $Rng(G)$ není dolní množina a to je spor. □

Cvičení: Lineární uspořádání jsou každé dvě dolní množiny porovnatelné inkluzí.
Cvičení: Co když místo dobrého uspořádání bude jen lineární uspořádání.

Theorem 3 (O porovnávání dobrých uspořádání.)**.** *A je množina dobře uspořádaná relací R. B je množina dobře uspořádaná relací S. Pak existuje právě jedno zobrazení F, které je izomorfismus A a dolní množiny B, nebo B a dolní množiny A.*

Důkaz. P je množina všech počátečních vnoření A do B. Nechť $F = \bigcup P$. F je zobrazení: Když $(x, y_1)(x, y_2) \in F$ existuje počáteční vnoření F_1, F_2, že $(x, y_1) \in F_1, (x, y_2) \in F_2$. Podle lemma $F_1 \subseteq F_2$ nebo naopak. Předpokládejme, že nastala tato situace. Tedy $(x, y_1) \in F_2; F_2$ je zobrazení, tedy $y_1 = y_2$. F je počáteční vnoření: Když $x_1 <_R x_2 \in Dom(F)$ tak existuje počáteční vnoření F' že $x_2 \in Dom(F')$. Tedy $x_1 \in Dom(F') \subseteq Dom(F)$. Podobně pro $Rng(F) = \bigcup Rng(F')$ je dolní. $F(x_1) = F'(x_1) <_S F'(x_2) = F(x_2)$, $Dom(F) = A \vee Rng(F) = B$. Sporem: $A \setminus Dom(F), B \setminus Rng(F)$ jsou neprázdné, mající nejmenší prvky a, b. Definujeme $F' = F \cup \{(a, b)\}$ je počáteční vnoření $F' \in P, F' \subseteq F$ a to je spor. □

Cvičení: Jednoznačnost F.
Cvičení: Sjednocení dolních množin je dolní množina.

Theorem 4. *a je konečná množina, pak každé lineární uspořádání na a jsou izomorfní.*

Důkaz. R, S jsou dvě lineární uspořádání a také dobrá uspořádání. (a, R) je izomorfní dolní množině (a, S) nebo dolní množina (a, R) je izomorfní (a, S). Dolní množina $b, b \approx a$, z Dedekindovy konečnosti platí, že $a = b$. □

Lemma 13 (Zachovávání konečnosti.)**.**

1. $(Fin(x) \wedge y \subseteq x) \rightarrow Fin(y)$
2. $(Fin(x) \wedge y \approx x) \rightarrow Fin(y)$
3. $(Fin(x) \wedge y \preceq x) \rightarrow Fin(y)$

Důkaz.

1. $w \subseteq \mathcal{P}(y) \subseteq \mathcal{P}(x)$
2. $\mathcal{P}(y)$ je izomorfní $\mathcal{P}(x)$
3. Plyne z 1 a 2.

□

Lemma 14 (sjednocení konečných množin)**.**

1. $Fin(x) \wedge Fin(y) \rightarrow Fin(x \cup y)$
2. $Fin(x) \rightarrow (\forall y)Fin(x \cup \{y\})$

Důkaz. $w \subseteq \mathcal{P}(x \cup y)$ neprázdná. $w_1 = \{u, (\exists t \in w)(u = t \cap x)\} \subseteq \mathcal{P}(x)$. Má maximální prvek v_1. $w_2 = \{u, (\exists t \in w)(t \cap x = v_1 \wedge t \cap y = u)\} \subseteq \mathcal{P}(y)$. Má maximální prvek v_2. $v_1 \cup v_2$ je maximální prvek w. □

Definice 34. *Třída všech konečných množin* $Fin = \{x, Fin(x)\}$.

Theorem 5 (Princip indukce pro konečné množiny)**.** *Je-li X třída, pro kterou platí:*

1. $\emptyset \in X$,
2. $x \in X \rightarrow (\forall y)(x \cup \{y\} \in X)$, *pak* $Fin \subseteq X$.

Důkaz. Sporem: Pokud $x \in Fin \setminus X$. nechť $w = \{v, v \subseteq x \wedge v \in X\}$. Podle 1: $\emptyset \in w$. $w \subseteq \mathcal{P}(x)$, neprázdná. w má maximální prvek v_0. $v_0 \subseteq x$. $v_0 \in X$, tedy $v_0 \neq x$ a $v_0 \subset X$. Tedy existuje $y \in x \setminus v_0$. Nechť $v_1 = v_0 \cup \{y\}$. Podle 2: $v_1 \in X$. Tedy $v_1 \in w$, spor s maximalitou v_0. □

Lemma 15. $Fin(x) \rightarrow Fin(\mathcal{P}(x))$

Důkaz. Indukcí: Nechť $X = \{x, Fin(\mathcal{P}(x))\}$. $\emptyset \in X$, protože $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ je konečná. Nechť $x \in X, y$ je množina. Chceme aby $x \cup \{y\} \in X$. BÚNO: $y \notin x$ (jinak triviální). Rozdělíme $\mathcal{P}(x \cup \{y\})$ na dvě části: $\mathcal{P}(x \cup \{y\}) = \mathcal{P}(x) \cup (\mathcal{P}(x \cup \{y\}) \setminus \mathcal{P}(x))$. Platí $\mathcal{P}(x) \approx z$, kde z se rovná předchozímu druhému prvku v sjednocení. Pro $u \in \mathcal{P}(x)$ definujeme $f(u) = u \cup \{y\}$. f je prosté zobrazení $\mathcal{P}(x)$ na z. Podle předpokladu $Fin(\mathcal{P}(x))$. Podle lemma $Fin(z)$. Podle lemma o sjednocení $Fin(\mathcal{P}(x) \cup z)$. Podle principu indukce $Fin \subseteq X$. □

Důsledek. $Fin(x) \cap Fin(y) \rightarrow Fin(x \times y)$

Důkaz. Nechť $z = x \cup y$, víme $Fin(z)$. $x \times y \subseteq z \times z \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(z))$. □

Lemma 16 (sjednocení konečně mnoha konečných množin je konečná množina)**.** *Je-li* $Fin(a)$ *a* $(\forall b \in a)Fin(b)$, *pak* $Fin(\bigcup a)$.

Důkaz. Indukcí: $X = \{x, x \subseteq Fin \rightarrow Fin(\bigcup x)\}$.

1. $\emptyset \in X$, protože $\bigcup \emptyset = \emptyset$.
2. Nechť $x \in X, y$ množina. Chceme aby $x \cup \{y\} \in X$.

Předpokládejme, že $x \cup \{y\} \subseteq Fin$. Speciálně $x \subseteq Fin$. $\bigcup(x \cup \{y\}) = \bigcup x \cup y$. Obě dvě jsou konečné a sjednocení tím pádem je také konečné. Tedy $x \cup \{y\} \in X$. Podle principu indukce $Fin \subseteq X$. $\square$

Důsledek (Dirichletův princip pro konečné množiny.). Je-li nekonečná množina sjednocení konečně mnoha množin, pak jedna z nich musí být nekonečná.

Lemma 17 (Každá konečná množina je srovnatelná se všemi množinami.)**.** $Fin(x) \rightarrow (\forall y)(y \preceq x \vee x \preceq y)$

Důkaz. Indukcí: $x = \{x, (\forall y)(y \preceq x \vee x \preceq y)\}$.

1. $\emptyset \in X$, protože $(\forall y)\emptyset \subseteq y$ tedy $\emptyset \preceq y$.
2. Nechť $x \in X, u$ je množina. BÚNO: $u \notin X$. Chceme $x \cup \{u\} \in X$, nechť X je množina.

Když $y \preceq x$, pak $x \preceq x \cup \{u\}$ z tranzitivity $y \preceq x \cup \{u\}$. Nechť $x \prec y$. g je prosté zobrazení x do y. Nechť $v \in X \setminus Rng(g)$. Definujeme $h = g \cup \{(u, v)\}, h$ je prosté zobrazení $x \cup \{u\}$ do y. Tedy $x \cup \{u\} \preceq y$. Z principu indukce $Fin \subseteq X$. $\square$

Cvičení: $Fin(x)$ a $f : x \rightarrow y$, pak $Rng(f) \preceq x$ (pomocí indukce).
Cvičení: $(\forall x)Fin(x)$ lze dobře uspořádat (indukcí).

Kapitola 6

Přirozená čísla

Definice 35 (von Neumann)**.** $0 = \emptyset; 1 = \{0\} = \{\emptyset\}; 2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}; 3 = \{0, 1, 2\} = \ldots,$ *Myšlenka: "Přirozené číslo je množina všech menších přirozených čísel."*

Definice 36. *w je **induktivní množina**, pokud $\emptyset \in w \wedge (\forall v \in w)(v \cup \{v\} \in w)$.*

6.1 9.Axiom nekonečna ("Existuje induktivní množina.")

$$(\exists z)(0 \in z \wedge (\forall x)(x \in z \to x \cup \{x\} \in z))$$

Definice 37. ***Množina všech přirozených čísel** ω je $\bigcap\{w, w \text{ je induktivní množina}\}$.*

Lemma 18. *ω je nejmenší induktivní množina.*

Důkaz. $0 \in \omega$, $x \in \omega, x$ patří do každé induktivní množiny. $x \cup \{x\}$ patří do každé induktivní množiny. $x \cup \{x\} \in \omega$. □

Prvky ω jsou **přirozená čísla** v teorii množin.

Definice 38. *Funkce následník $S : \omega \to \omega$. Pro $v \in \omega : S(v) = v \cup \{v\}$. "Následník čísla v."*

Theorem 6 (Princip (slabé) indukce pro přirozená čísla.)**.** *Je-li $X \subseteq \omega$ taková, že platí:*

1. $0 \in X$,
2. $x \in X \to S(x) \in X$. *Pak* $X = \omega$.

Důkaz. 1 a 2 dohromady říká, že X je induktivní, tedy $\omega \subseteq X$. □

Příklad. Důkaz indukcí: Chceme dokázat: $(\forall n \in \omega)(\varphi(n))$. Dokazujeme: 1. $\varphi(0)$ a 2. $(\forall n \in \omega)(\varphi(n) \to \varphi(S(n)))$.

Poznámka. Princip silné indukce: 2: $((\forall m \in \omega)m \in X) \to n \in X$.

Lemma 19 ($\in$ je ostré uspořádání)**.** *Pro libovolné $m, n \in \omega$ platí:*

1. $n \in \omega \to n \subseteq \omega$
   - *"Prvky přirozených čísel jsou přirozená čísla."*
2. $m \in n \to m \subseteq n$
   - *"Náležení je tranzitivní na ω."*
3. $n \notin n$
   - *"$\in$ je antireflexivní na ω."*

Z toho všeho plyne, že se jedná o ostré uspořádání.

Důkaz. Indukcí:

1. $0 \subseteq \omega$, a indukční krok $n \in \omega$, předpokládáme, že $n \subseteq \omega$. Pak $\{n\} \subseteq \omega$ tedy $n \cup \{n\} \subseteq \omega$.
2. Indukcí podle n:

- 1. Krok: $m \notin 0$ tím pádem implikace splněna.
- 2. Krok $X = \{n, n \in \omega \wedge (\forall m)(m \in n \rightarrow m \subseteq n)\}$.
- Víme $0 \in X$.
- Nechť $n \in X$, víme $S(n) \in \omega$.
- Nechť $m \in S(n) = n \cup \{n\}$. Pak buď $m \in n$ a z IP pak $m \subseteq n$ anebo $m = n$ tím pádem také $m \subseteq n \subseteq S(n)$.

3. $0 \nsubseteq 0$ platí, nechť $n \in \omega$ a $n \nsubseteq n$.

- Sporem $S(n) \subseteq S(n) = n \cup \{n\}$. Z toho pak plyne, že buď $S(n) \subseteq \{n\}$ anebo $S(n) \subseteq n$. V obou případech je $S(n) \subseteq n$, ale to pak znamená, že $n \in S(n) \subseteq n$ což je spor s předpokladem.

□

Lemma 20. *Každé přirozené číslo je konečná množina.*

Důkaz. Indukcí: $Fin(\emptyset)$ víme. Podle lemma $Fin(x) \rightarrow (\forall y)Fin(x \cup \{y\})$, speciálně pro $Fin(x \cup \{x\})$ a to je následník. □

Theorem 7. *Množina x je konečná právě tehdy, když $(\exists n \in \omega)x \approx n$.*

Důkaz. $\Leftarrow$ $Fin(n)$ tedy $Fin(x)$. $\Rightarrow$ indukcí: $X = \{x; (\exists n \in \omega)x \approx n\}$. Víme, že $0 \in X$ protože $0 \approx 0$. Nechť $x \in X, y$ množina. Víme, že $(\exists n \in \omega)n \approx x$. $y \in x$ pak $x \cup \{y\} = x \approx n$, $y \notin x$ pak $x \cup \{y\} \approx S(n) = n \cup \{n\}$. K bijekci x a n přidáme (y, n). Tedy $Fin \subseteq X$. □

Lemma 21. *Množina ω i každá induktivní množina je nekonečná.*

Důkaz. Podle lemma: 1 $n \in \omega \rightarrow n \subseteq \omega$, tedy $n \in \mathcal{P}(n)$ tedy $\omega \subseteq \mathcal{P}(n), \omega$ je neprázdná ale nemá maximální prvek vzhledem k inkluzi. Když $n \subseteq \omega$ pak podle lemma 3. $n \nsubseteq n$ a tedy $n \subset n \cup \{n\} = S(n)$. $\omega \subseteq W$ tedy i induktivní množiny. □

Cvičení: ω je Dedekindovsky nekonečná.

Lemma 22 (Linearita $\in$ na ω.)**.** *$m, n \in \omega$, platí:*

1. *$m \in n \leftrightarrow m \subset n$*
2. *$m \in n \vee m = n \vee n \in m$ (trichotomie)*

Důkaz. 1. $\rightarrow$ plyne z lemma 2 $m \in n \rightarrow m \subset n \wedge n \nsubseteq n$

- $\leftarrow$ indukcí podle n; $n = 0$ nelze splnit.
- Indukční krok. Nechť platí pro nějaké n a $\forall m$.
- Nechť $m \subset S(n) = n \cup \{n\}$ a $m \subseteq n$, kdyby ne pak $n \in m$ tedy $n \subseteq m$ tedy $S(n) = n \cup \{n\} \subseteq m$ a to je spor.
- $m \subset n$ z IP $m \in n \subseteq S(n)$ tedy $m \in S(n)$
- $m = n$ pak $n \in S(n)$

2. Pro $n \in \omega$ nechť $A(n) = \{m \in \omega, m \in n \vee m = n \vee n \in m\}$.

- Dokážeme, že $A(n)$ je induktivní, indukcí podle m.
- $n = 0 : 0 \in A(0)$, protože $0 = 0$
- Je-li $m \in A(0)$, pak: $m = 0 : 0 \in \{m\}$ anebo $0 \in m$ a z obou plyne $0 \in m \cup \{m\} = S(n)$.
- Tedy $S(n) \in A(0)$.
- Tedy $A(0) = \omega$.
- Tedy také $(\forall n \in \omega)0 \in A(n)$.
- $n \in \omega, m \in \omega$, předpokládejme, že $m \in A(n)$. Ukážeme, že $S(m) \in A(n)$.
- $m \in n \rightarrow m \subset n; \{m\} \subseteq n$ tedy $S(m) \subseteq n$ z toho plyne, že $S(m) = n \vee S(m) \in n$.
- $m = n \vee n \in m$ potom $n \in m \cup \{m\} = S(m)$
- Ve všech případech ke $S(m) \in A(n)$.

□

Theorem 8. *Množina ω je dobře (ostře) uspořádaná relací $\in$.*

Důkaz. Nechť $a \subseteq \omega, a \neq \emptyset$. Zvolme $n \in a$. Není-li n nejmenší (minimální), tak definuji $b = n \cap a$. n je konečná, tak i b je konečná a neprázdná. $b \subseteq \omega$ tedy b má minimální prvek m vzhledem k náležení. m je minimální i v množině a: kdyby $(\exists x \in a) x \in m$, tak víme, že $m \in n$, tedy $m \subseteq n$, tedy $x \in n$, tedy $x \in b$. To je spor s minimalitou m v b. $\in$ je lineární na ω, tedy m je nejmenší prvek v a. Tedy $\in$ je dobré uspořádání. $\square$

Poznámka. Nekonečná množina A s lineárním (ostrým) uspořádáním $<$ pro každé $a \in A : | \leftarrow, a]$ je konečná. Pak $<$ je dobré a $(A, <)$ je izomorfní $(\omega, \in)$.

Theorem 9 (Charakterizace uspořádání $\in$ na ω)**.** *Nechť A je nekonečná množina, lineárně uspořádaná (ostře) relací $<$ tak, že pro každé $a \in A$ je dolní množina $| \leftarrow, a]$ konečná. Pak $<$ je dobré a množiny A, ω jsou izomorfní vzhledem k $<, \in$.*

Důkaz. $<$ je dobré: $\emptyset \neq c \in A$. Nechť $a \in c$, předpokládejme, že a není minimální v c, pak definujeme $b = c \cap | \leftarrow, a]$. b je konečná. Tedy má minimální prvek m, m je minimální i v c. Protože $m \leq a$, pak $x \leq a$ tedy $x \in | \leftarrow, a]$ tedy $x \in b$ a to je spor. Izomorfismus: podle věty o porovnávání dobrých uspořádání jsou 2 možnosti:

1. A je izomorfní s dolní podmnožinou $B \subseteq \omega$, pak B není shora omezená. Neexistuje $n \in \omega (\forall b \in B) b \in n$. Sporem $B \subseteq S(n)$ tedy B by byla konečná a to je spor.
   - To znamená, že $(\forall n \in \omega)$ je menší než nějaký prvek $b \in B$. B je dolní množina, tedy $n \in B \to \omega \subseteq B \to \omega = B$.
2. ω je izomorfní dolní podmnožině $C \subseteq A$. C není shora omezená, kdyby ano, tak $\exists a \in A : C \subseteq | \leftarrow, a], C$ by byla konečná, spor. $(\forall a \in A, \exists c \in C : a \subseteq c, C$ je dolní, tedy $C = A$.

$\square$

6.2 Spočetné množiny

Definice 39. *Množina x je **spočetná**, pokud $x \approx \omega$. Množina x je **nejvýše spočetná**, pokud je konečná nebo spočetná. Jinak je množina **nespočetná**.*

Theorem 10.
1. *Každá shora omezená množina $A \subseteq \omega$ je konečná, každá shora neomezená $A \subseteq \omega$ je spočetná.*
2. *Každá podmnožina spočetné množiny je nejvýše spočetná.*

Důkaz.
1. A omezená, to znamená, že $\exists n : A \subseteq S(n)$. Takže $Fin(S(n)) \to Fin(A)$.
   - Pokud je A neomezená, pak je nekonečná. To lze dokázat sporem, že kdyby byla konečná, pak má A maximální prvek m, tedy je shora omezená m, to je spor.
   - A je lineárně uspořádaná $\in$. Pro každé $n \in A$ je $| \leftarrow, n] \subseteq S(n)$, tedy $| \leftarrow, n]$ je konečná. Podle charakterizační věty A je izomorfní ω. Takže $A \approx \omega$.
2. A je spočetná $f : A \to \omega$ (bijekce). $B \subseteq A$, pak $B \approx f[B] \subseteq \omega$. Podle 1) je $f[B]$ spočetná anebo konečná.

$\square$

Příklad. **Lexikografické uspořádání** na $\omega \times \omega$.

$$(m_1, n_1) <_L (m_2, n_2) \leftrightarrow (m_1 \in m_2 \vee ((m_1 = m_2) \wedge (n_1 \in n_2)))$$

Cvičení: Ověřte, že $<_L$ je dobré uspořádání na $\omega \times \omega$.
Cvičení: Ověřte, že $<_L$ na $\omega \times 2$ je izomorfní s $(\omega, \in)$.
Cvičení: Ověřte, že $<_L$ na $2 \times \omega$ není izomorfní s $(\omega, \in)$.

Definice 40. ***Maximo-lexikografické uspořádání*** *na $\omega \times \omega$ je:*

$$\max(m, n) = \begin{cases} m & n \in m \\ n & \textit{jinak} \end{cases}$$

$$\begin{gathered}(m_1, n_1) <_{ML} (m_2, n_2) \\ \updownarrow \\ ((\max(m_1, n_1) \in \max(m_2, n_2)) \vee ((\max(m_1, n_1) = \\ = \max(m_2, n_2)) \wedge ((m_1, n_1) <_L (m_2, n_2))))\end{gathered}$$

Cvičení: Ověřte, že $\omega \times \omega <_{ML}$ je izomorfní $(\omega, \in)$.

Theorem 11. *Jsou-li A, B spočetné množiny, pak $A \cup B$ a $A \times B$ jsou spočetné.*

Důkaz. $f : A \to \omega$ a $g : B \to \omega$ jsou bijekce. Definujeme $h : A \cup B \to \omega \times 2 \approx \omega$ jako:

$$h(x) = \begin{cases} (f(x), 0) & x \in A \\ (g(x), 1) & x \in B \setminus A \end{cases}$$

h je prosté. Tedy $A \cup B \subseteq \omega \times 2 \approx \omega \wedge \omega \preceq A \preceq A \cup B$ a z Cantor-Bernsteinovy věty implikuje, že $\omega \approx A \cup B$. $A \times B$ definujeme $k : A \times B \to \omega \times \omega$ jako $k((a,b)) = (f(a), g(b)), k$ je bijekce. Opět mám $A \times B \approx \omega \times \omega \approx \omega$. □

Důsledek. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ jsou spočetné. Kde $\mathbb{Z}$ lze modelovat jako množinu dvojic, kde první je číslo a druhé bool jestli je kladné nebo ne. A $\mathbb{Q}$ jako množinu dvojic (m, n) kde je číslo nejmenší společný dělitel $(m, n) = 1$ a číslo je $\frac{m}{n}$.

Důsledek. Konečná sjednocení, konečné součiny jsou spočetné. **Dirichletův princip**: je-li A nespočetná, $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, potom aspoň jedna množina A_i je nespočetná. Konečná podmnožina $[A]^{<\omega}$ konečné posloupnosti jsou spočetné.

Cvičení: Je-li A nespočetné, B spočetná, C konečná, potom $A \cup C, A \setminus C$ jsou nespočetné a $B \cup C, B \setminus C$ jsou spočetné, $A \cup B, A \setminus B$ jsou nespočetné.

Poznámka. Spočetné sjednocení spočetně mnoha množin $\bigcup A$, kde A je spočetná a $(\forall a \in A)$ jsou spočetné.

Theorem 12 (Cantor)**.**

$$x \prec \mathcal{P}(x)$$

Důkaz. Pomocí diagonální metody. $\preceq$: $f(y) = \{y\}, f : x \to \mathcal{P}(x)$ je prosté. Definujme $y = \{t, t \in x \wedge t \notin f(t)\}$. Potom $y \subseteq \mathcal{P}(x)$ nemá vzor při f. Kdyby

$$f(v) = y : \begin{cases} v \in y & \text{pak } v \notin f(v) = y \quad \text{SPOR} \\ v \notin y = f(v) & \text{tedy } v \in y \quad \text{SPOR} \end{cases}$$

□

Důsledek. $\mathcal{P}(\omega)$ je nespočetná.

Důsledek. V není množina: $\mathcal{P}(V) \subseteq V$, kdyby byla množina, pak by musela platit Cantorova věta.

Theorem 13.

$$\mathcal{P}(\omega) \approx \mathbb{R} \approx [0, 1]$$

Důkaz. Víme $\mathcal{P}(\omega) \approx^{\omega} 2$ podmnožiny $\leftrightarrow$ charakteristická funkce $\leftrightarrow$ posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \dots)$, kde $a_i \in \{0, 1\}$. $[0, 1] \approx^{\omega} 2 : a \in [0, 1]$ zapíšu v binární soustavě tak, že pokud je to nula, tak je to nekonečně nul a jinak vždy tak, aby obsahovalo nekonečno jedniček. $\leftarrow$ použijeme trojkovou soustavu. $(a_0, a_1, a_2, \dots) \to a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{3^{n+1}}$. Cantor-Bernstein $\to [0, 1] \approx^{\omega} 2$. (pozn.: Cantorovo diskontinuum). $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{E} \to [0, 1]$ nějakou vhodnou funkci např. $\frac{\pi/2 - \arctan(x)}{\pi}$. □

Poznámka. Množina algebraických čísel (tj. kořeny polynomů s racionálními koeficienty) je spočetná.

Cvičení: Pokrytí N intervaly.

1. *Konečně.*
   - $A \subseteq I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n$ pak $\sum(b_i - a_i \geq 1$
2. *Nekonečně.*
   - $\forall \epsilon > 0 : \exists I_1, I_2, \dots, A \subseteq \bigcup I_i; \sum(b_i - a_i) < \epsilon$

Poznámka. **Hypotéza kontinua** je, že každá nekonečná podmnožina $\mathbb{R}$ je buď spočetná anebo ekvivalentní s $\mathbb{R}$.

6.3 Axiom výběru

6.3.1 Princip výběru

Pro každý rozklad r množiny x existuje **výběrová množina**. To jest $v \subseteq x$, pro kterou platí $(\forall u \in r)(\exists x)(v \cap u = \{x\})$.

Definice 41. *Je-li X množina, pak funkce f definovaná na X splňující $(y \in X \wedge y \neq \emptyset) \to f(y) \in y$ se nazývá **selektor** na množině X.*

6.3.2 10.Axiom výběru (AC - axiom of choice)

Na každé množině existuje selektor.

Ekvivalentně

Každou množinu lze dobře uspořádat. $\leq$ je trichotomická. Zornovo lemma.

Důsledek.
- Každý vektorový prostor má bázi.
- Součin kompaktních topologických prostorů je kompaktní.
- Hahn-Banachova věta.
- Princip kompaktnosti.
- Banach Tarski (rozdělení koule na malé části a vytvoření dvou stejně velkých koulí).

Definice 42. *(Indexový) soubor množin $< F_j; j \in J >$. Kde F je zobrazení s definovaným obrazem J. Pro $j \in J : F_j = F(j)$. J je **indexová třída** a jeho prvky jsou **indexy**.*

Lze definovat:

$$\begin{cases} \bigcup_{j\in J} F_j \text{ jako } \{x, (\exists j \in J) x \in F_j)\} \\ \bigcup_{j\in J} F_j = \bigcup Rng(F) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bigcap_{j\in J} F_j \text{ jako } \{x, (\forall j \in J) x \in F_j)\} \\ \bigcap_{j\in J} F_j = \bigcap Rng(F) \end{cases}$$

Kartézský součin souboru množin indexovaného množinou J je $X_{j\in J}F_j : \{f, f : J \to \bigcup_{j\in J} F_j \wedge (\forall j \in J) f(j) \in F_j\}$.

Lemma 23. *Je-li J množina, pak XF_j je množina. Je-li $(\forall j \in J)F_j = Y$, pak $X_{j\in J}F_j = {}^J Y$.*

Důkaz. Axiom nahrazení. $Rng(F)$ je množina, $\bigcup Rng(F)$ je množina. ${}^J \bigcup_{j\in J} F_j$ je množina. $XF_j \subseteq^J \bigcup_{j\in J} F_j$. □

Lemma 24. *NTJE: (Následující tvrzení jsou si ekvivalentní.)*

1. *Axiom výběru.*
2. *Princip výběru.*
3. *Pro každou množinovou relaci s existuje funkce $f \subseteq s$ taková, že $Dom(f) = Dom(s)$.*
4. *Kartézský součin $X_{i\in x}a_i$ neprázdného souboru neprázdných množin je neprázdný.*

Důkaz. $1 \Rightarrow 2$: r rozklad X, podle 1 existuje selektor f na r. Pak $Rng(f)$ je výběrová množina. $2 \Rightarrow 3$: BÚNO: $s \neq \emptyset$. Vytvoříme rozklad s. $n = \{\{i\} \times s \shortparallel \{i\}; i \in Dom(s)\} = \{\{(i, x), (i, x) \in s\}, i \in Dom(s)\}$. Výběrová množina n je funkce, která je podmnožina s a má stejný definiční obor. $3 \Rightarrow 4$: Máme soubor množin $< a_i, i \in x >$. Vytvoříme relaci $s = \{(i, y), i \in x \wedge y \in a_i\}$. Funkce $f \subseteq s : Dom(f) = Dom(s) = x$ je prvkem $X_{i\in x}a_i$. $4 \Rightarrow 1$: x množina. BÚNO: $x \neq \emptyset, \emptyset \in X$. $ID \restriction x$ určuje soubor $< y; y \in x >$. Každý prvek $X_{y\in x}y$ je selektor na x. □

Lemma 25. *Sjednocení spočetného souboru spočetných množin je spočetné. (Popřípadě je všude místo spočetné nejvýše spočetné.)*

Důkaz. Soubor $< B_j; j \in J >$. BŮNO: $I = \omega$. Najděme prosté zobrazení $\bigcup_{j\in\omega} B_j$ do $\omega \times \omega$. Uvažujme soubor $< E_j; j \in \omega >$ kde E_j je množina všech prostých zobrazení B_j do ω. Podle lemma 4) je $X_{j\in\omega}E_j$ neprázdný, tedy existuje soubor $< f_j; j \in \omega >$, kde $f_j \in F_j$. Definujme $h; \bigcup_{j\in\omega} B_j \to \omega \times \omega$ jako $h(x) = (j, f_j(x))$. Kde j je nejmenší prvek ω pro který $x \in B_j$. □

Poznámka. Bez AC je bezesporné ZF a to, že "$\mathbb{R}$ jsou spočetným sjednocením spočetných množin".

6.4 Princip maximality (PM)

- AC $\leftrightarrow$ PM
- Je-li A množina uspořádaná relací $\leq$ tak, že každý řetězec má horní mez.
- Pak pro každé $a \in A$ existuje maximální prvek $b \in A$ takový, že $a \leq b$.

Definice 43. *$B \subseteq A$ je* ***řetězec*** *pokud B je lineárně uspořádaná $\leq$.*

Poznámka. V aplikacích často pro $(A, \subseteq); A \subseteq \mathcal{P}(x)$ stačí ověřit, že $\bigcup B \in A$.

Cvičení: Ukažte pomocí PM: Je-li $(A, \leq)$ uspořádaná množina, pak pro každý řetězec $B \subseteq A$ existuje maximální řetězec C splňující $B \subseteq C \subseteq A$.

6.4.1 Princip maximality II (PMS)

Je-li $(A, \leq)$ uspořádaná množina, kde každý řetězec má suprémum, pak pro každé $a \in A$ existuje $b \in A$ maximální prvek splňující $a \leq b$.

Cvičení: Dokažte: PM$\leftrightarrow$PMS.

6.5 Princip trichotomie $\preceq$ (PT)

Pro každé dvě množiny x, y platí $x \preceq y$ nebo $y \preceq x$.

Lemma 26. *PM $\rightarrow$ PT.*

Důkaz. Definuji množinu $D = \{f, f$ prosté zobrazení $\wedge Dom(f) \subseteq x \wedge Rng(f) \subseteq y\}$. $(D, \subseteq)$ splňuje předpoklady PM. Tedy má maximální prvek g. Kdyby $x \setminus Dom(f) \neq \emptyset$ a $y \setminus Rng(f) \neq \emptyset$, pak lze g rozšířit o novou dvojici (u, v), spor s maximalitou g. Pokud $Dom(f) = x$, pak $x \preceq y$. Pokud $Rng(f) = y$, pak g^{-1} je prosté zobrazení y do x, tedy $y \preceq y$. $\square$

Cvičení: Sjednocení řetězce prostých zobrazení je prosté zobrazení.

6.6 Princip dobrého uspořádání (VVO)

- Každou množinu lze dobře uspořádat.
- Známo jako Zermelova věta.
- AC $\leftrightarrow$ VVO

Lemma 27. *VVO $\rightarrow$ AC*

Důkaz. $x \neq \emptyset, \emptyset \notin x$ podle VVO máme dobré uspořádání na $\bigcup x$. Každý $y \in x$ je neprázdná podmnožina $\bigcup x$, tedy má nejmenší prvek $\min_{\leq} y$. Definujeme $f : x \rightarrow \bigcup x$ jako $f(y) = \min_{\leq}(y)$. Tato f je selektorem na množině x. $\square$

Cvičení: PM $\rightarrow$ VVO

Kapitola 7

Ordinální čísla

7.1 "Typy dobře uspořádaných množin."

- Kardinální čísla $\subseteq$ ordinální čísla. Mohutnosti dobře uspořádaných množin. S (AC) mohutnosti všech množin.
- Ordinální čísla jsou dobře uspořádaná $\in$, platí pro ně princip transfinitní indukce.

Definice 44. *Třída X je **tranzitivní** pokud $x \in X \to x \subseteq X$.*

Příklad. ω i každé $n \in \omega$ jsou tranzitivní i V.

Cvičení: X tranzitivní $\leftrightarrow \bigcup X \subseteq X$

Lemma 28. *1. Jsou-li X, Y tranzitivní pak $X \cap Y, X \cup Y$ jsou tranzitivní.*

2. X třída, pro kterou každé $x \in X$ je tranzitivní množina, pak $\bigcap X$ a $\bigcup X$ jsou tranzitivní.

3. Je-li X tranzitivní třída, pak $\in$ je tranzitivní na $X \leftrightarrow$ každý $x \in X$ je tranzitivní množina.

Důkaz. 1. Je pozorování.

2. Plyne analogicky z 1.

3. Jako *Cvičení*.

$\square$

Definice 45. *Množina x je **ordinální číslo (ordinála)** pokud x je tranzitivní množina a $\in$ je dobré uspořádání na x. Třídu všech ordinálních čísel značíme On.*

Příklad. ω a každé $n \in \omega$ je ordinální číslo.

Důsledek. Pro každou nekonečnou množinu x platí $\omega \preceq x$.

Lemma 29. *On je tranzitivní třída.*

Důkaz. $y \in x \in On$. Máme $y \leq x, \in$ je dobré ostré uspořádání na y. $\in$ je dobré ostré na x. Z lemma 3) je y tranzitivní množina. y je ordinála. $\square$

Lemma 30. *$\in$ je tranzitivní na On.*

Lemma 31. *$x, y \in On$, pak:*

1. $x \notin x$

2. $x \cap y \in On$

3. $x \in y \leftrightarrow x \subset y$

Důkaz. 1. Sporem z antireflexivity $\in$ na x.

2. Přímo z definice.

3. $\to$ z tranzitivity y a 1)
$\leftarrow y \setminus x \neq \emptyset \subseteq y, y \setminus x$ má nejmenší prvek z. Platí $z = x$ (*Cvičení*). $\square$

Theorem 14. *$\in$ je dobré ostré uspořádání třídy On.*

Důkaz. Antireflexivita z lemma 1), tranzitivita pak dohromady dává ostré uspořádání. Trichotomie: $x \neq y \in On$ podle lemma 2) $x \cap y \in On$. Sporem kdyby $x \cap y \subset x \wedge x \subset y$ pak $x \cap y \in y \wedge x \cap y \in x$, tedy $x \cap y \in x \cap y$ a to je spor s lemma 1). Když tedy $x \cap y = x$ pak $x \subset y$ tedy $x \in y$. Z toho plyne, že se jedná o lineární uspořádání. Pro dobrost stačí existence minimálního prvku (*Cvičení*). □

Důsledek. On je vlastní třída. Je-li X vlastní třída, tranzitivní, dobře uspořádaná $\in$, pak $X = On$.

7.1.1 Značení:

- $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ jsou ordinální čísla.
- $\alpha < \beta$ místo $\alpha \in \beta$.
- $\alpha \leq \beta$ místo $\alpha \in beta \vee \alpha = \beta$.

Lemma 32. *1. Množina $x \subseteq On$ je ordinální číslo $\leftrightarrow x$ je tranzitivní.*

2. $A \subseteq On, A \neq \emptyset$, pak $\bigcap A$ je nejmenší prvek A vzhledem k $\leq$.

3. $a \subseteq On$ množina, pak $\bigcup a \in On$ a $\bigcup a = \sup_{\leq} a$.

Důkaz. 1. $\rightarrow$ z definice, $\leftarrow$ z věty.

2. Z věty a $\bigcap A = \inf A$.

3. $\bigcup a$ je tranzitivní, $\bigcup a \subseteq On$ podle 1) je ordinální číslo.

□

Důsledek. ω je supremum množiny všech přirozených čísel v On. Konečné ordinály jsou právě přirozená čísla.

Cvičení: Důkaz: $\bigcup \omega \in On \wedge \bigcup \omega = \sup_{\leq} \omega$. Zbývá ověřit $\omega = \bigcup \omega$.

Lemma 33. *$\alpha \in On$, pak $\alpha \cup \{\alpha\}$ je nejmenší ordinální číslo větší než α.*

Důkaz. $\alpha \subseteq On$ protože On je tranzitivní. $\alpha \cup \{\alpha\}$ je tranzitivní množina ordinálních čísel. Podle lemma 1) $\alpha \cup \{\alpha\}$ je ordinální číslo. Je-li $\beta \in On, \beta \in \alpha\{\alpha\}$, pak $\beta \in \alpha \vee \beta = \alpha$ tedy $\beta \subseteq \alpha$. □

Definice 46. *$\alpha \cup \{\alpha\}$ je **následník** α. α je **předchůdce** $\alpha \cup \{\alpha\}$. α je **izolované** pokud $\alpha = 0$ nebo pokud α má předchůdce, jinak je **limitní**.*

Theorem 15 (O typu dobrého uspořádání.)**.** *Je-li a množina dobře uspořádaná relací r, pak existuje právě jedno ordinální číslo α a právě jeden izomorfismus (a, r) a $(\alpha, \leq)$. (Bez důkazu.)*

Definice 47. *α je **typ** dobrého uspořádání r.*

Poznámka. Na $On^2 = On \times On$ lze definovat lexikografické uspořádání i maximolexikografické uspořádání.

7.2 Princip transfinitní indukce

Je-li $A \subseteq On$ třída splňující $(\forall \alpha \in On)(\alpha \subseteq A \rightarrow \alpha \in A)$, potom $A = On$.

Důkaz. Sporem: $On \setminus A \neq \emptyset$ díky dobrému uspořádání $\in$ existuje nejmenší prvek $\alpha \in On \setminus A$. Potom každé $\beta \in \alpha$ už je prvkem A, tedy $\alpha \subseteq A$, z předpokladu věty $\alpha \in A$ a to je spor. □

Theorem 16 (Druhá verze principu transfinitní indukce.)**.** *Je-li $A \subseteq On$ třída splňující:*

1. $0 \in A$

2. Pro každý $\alpha \in On$ platí $\alpha \in A \rightarrow \alpha \cup \{\alpha\} \in A$.

3. Je-li α lineární pak $\alpha \subseteq A \rightarrow \alpha \in A$.

Pak $A = On$.

Theorem 17 (O konstrukci transfinitních rekurzí.)**.** *Je-li $G : V \rightarrow V$ třídové zobrazení, pak existuje právě jedno zobrazení $F : On \rightarrow V$ splňující $(\forall \alpha \in On) F(\alpha) = G(F \restriction \alpha)$.*

Varianty:

- $F(\alpha = G(F[\alpha])$
- $F(\alpha) = G(\alpha, F \restriction \alpha)$
- *$G_1(F(\beta))$ je-li α následník β, jinak $G_2(F[\alpha])$ je-li α limitní.*

Důkaz. Je pomocí transfinitní indukce a axiomu nahrazení. □

Příklad. $m+n : F(m) = n+m$ se dá nadefinovat jako $F(0) = n, F(S(m)) = S(F(m))$. AC $\rightarrow$ VVO: A množina g selektor na $\mathcal{P}(A)$ tak $f(0) = g(A)$ a $f(\beta) = g(A - f[\beta])$.